

# 第 12 章 變異數分析

## 觀念題

1. 證明：

$$\begin{aligned}SSE &= \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^k (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 \\&= \sum_{i=1}^{n_1} (X_{i1} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{i2} - \bar{X}_2)^2 + \sum_{i=1}^{n_3} (X_{i3} - \bar{X}_3)^2 \\&= (n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + (n_3 - 1)s_3^2 \\MSE &= \frac{SSE}{n - k} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + (n_3 - 1)s_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - k} = S_P^2\end{aligned}$$

得證。

2. 就此二 Case 而言，其  $SSB = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2 = n_1 (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}})^2 + n_2 (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})^2$ ，由於二個 Case 的  $n_1, n_2$ ； $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ ，與  $\bar{\bar{X}}$  皆相同，故其  $SSB$  與  $MSB$  皆相同。

但 Case(b) 的資料較集中，故其  $MSE$  較小所以  $F = \frac{MSB}{MSE}$  較大，故 Case(b) 較有可能拒絕  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 。

3. 依據  $S_B^2/S_E^2$  的比值來判斷  $H_0$  是否成立，而  $S_B^2/S_E^2$  最小值為 1，即  $H_0$  成立。

因此， $S_B^2/S_E^2$  愈大，則表示  $H_0$  不成立的機會愈大。

故變異數分析的檢定必為右尾檢定。

4. (1) 每個反應變數的母體均為常態分配。  
 (2) 每個母體的變異數均相等。  
 (3) 抽自各母體的各組隨機樣本互為獨立。
5. 一因子的  $MSE$  較二因子的  $MSE$  大，因此  $F$  值被低估，故易於接受  $H_0$ ；由此可能誤以為因子無顯著影響而導致結論發生錯誤。
6. (a) 為了進一步探討是否存在某幾個母體平均數相同時，得進行多重比較。  
 (b) 聯立的各個信賴區間的信賴水準為  $1 - \alpha/m$ ，使用此方法保證所有  $m$  組（兩兩平均數差）信賴區間同時成立的機率至少為  $(1 - \alpha)$ 。
7.  $F_\alpha(1, df) = t_{\alpha/2}^2(df)$
8. 因  $MSB$  是由  $SSB$  除於自由度所得，而  $SSB = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{X}})^2$ 。當母體平均數不完全相同時，與  $\bar{x}$  相減再平方後，所累加後的值將變大，因而造成  $MSB$  會是  $\sigma^2$  的偏高估計值。
9. 因實驗中若出現交互作用的效果，則可能會掩蓋住  $A$  因子或  $B$  因子的效果，而使我們接受本來應該拒絕的假設。

### 計算與應用題

1. (a)  $\bar{x}_A = 70$   $\bar{x}_B = 73$   $\bar{x}_C = 61$   
 $\bar{\bar{x}} = 68$



ANALYSIS OF VARIANCE					
SOURCE	DF	SS	MS	F	p
FACTOR	2	312.0	156.0	9.00	0.007
ERROR	9	156.0	17.3		
TOTAL	11	468.0			

(b)  $\alpha = 0.05$

$$F_{0.05}(2, 9) = 4.2565 < F = 9$$

$\therefore$  reject  $H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C$

(施肥的產量較多)

2. (a) ANOVA 表

	SS	d.f	MS	F
教育程度 ( $SSB$ )	274.745	2	137.373	0.719
殘 差 ( $SSE$ )	8984	47	191.149	
總 和	9258.745	49		

$$\begin{aligned} SSB &= \sum_{j=1}^8 n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 \\ &= 25(7.8 - 9.61)^2 + 15(9.7 - 9.61)^2 + 10(14 - 9.61)^2 \\ &= 274.745 \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{25 \times 7.8 + 15 \times 9.7 + 10 \times 14}{50} = 9.61$$

$$SSE = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = 1835 + 2442 + 4707 = 8984$$

(b)  $F_{0.05}(2, 47) \doteq 3.2 > F = 0.719$

$\therefore$  accept  $H_0$  (i.e. 教育程度對所得無顯著影響)

3.  $SST = 10800$

$$SEE = 4560$$

(a) ANOVA 表

變異來源	SS	d.f	MS	F
<i>SSB</i>	6240	2	3120	18.47
<i>SSE</i>	4560	27	168.89	
Total	10800	29		

(b)  $F_{0.05}(2, 27) = 3.3541 < F = 18.47$

$\therefore$  reject  $H_0$  (i.e. 三種製造方法的平均產有顯著差異)

4.

變異來源	SS	d.f	MS	F
處理方式 ( <i>SSB</i> )	36	5	7.2	3.214
殘 差 ( <i>SSE</i> )	(56)	(25)	2.24	
總 和	92	30		

$$5. \bar{x} = \frac{50 + 12 + 63}{25} = 5$$

$$SSB = \sum n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 = 10(5 - 5)^2 + 6(2 - 5)^2 + 9(7 - 5)^2 = 90$$

ANOVA 表為：

變異來源	SS	d.f	MS	F
<i>SST</i>	90	2	45	13.93
<i>SSE</i>	71	22	3.23	
Total	161	24		

$$SSE = 30 + 16 + 25 = 71$$

6.  $H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C$

ANOVA 表

變異來源	平方和	自由度	均方	<i>F</i> -比值
處理方式	107.11	2	53.56	$F = 0.36$
殘 差	2208.67	15	147.24	
總 和	2315.78	17		



由於  $F = 0.36 < F_{0.01}(2, 15) = 6.36$ ，故結論為接受  $H_0$ ；亦即三種狗食被偏好的程度並無顯著的差異。

$$7. \bar{x}_{\text{甲}} = 82.5 \quad \bar{x}_{\text{乙}} = 85.8 \quad \bar{x}_{\text{丙}} = 80.5 \quad \bar{\bar{x}} = 83.1$$

ANALYSIS OF VARIANCE					
SOURCE	DF	SS	MS	F	p
FACTOR	2	65.65	32.825	0.304	0.805
ERROR	12	1295.3	107.9		
TOTAL	14	1388			

$$F_{0.05}(2, 12) = 3.8853 > F = 0.304$$

$$\therefore \text{accept } H_0 : \mu_{\text{甲}} = \mu_{\text{乙}} = \mu_{\text{丙}}$$

(三社區平均所得無顯著差異)

$$8. (a) \sum (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = 31 \times 17.05^2 = 9011.8$$

$$\sum (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 = 15 \times 15.43^2 = 3571.27$$

$$\sum (x_{i3} - \bar{x}_3)^2 = 15 \times 14.46^2 = 3136.37$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{32 \times 81.06 + 16 \times 78.56 + 16 \times 87.81}{64} = 82.12$$

$$\begin{aligned} SSB &= \sum_{i=1}^3 (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 \cdot n_i \\ &= 757.43 \end{aligned}$$

$$SSE = 9011.8 + 3571.27 + 3136.37 = 15719.44$$

ANOVA 表為

	SS	d.f	MS	F
SSB	757.43	2	378.715	1.47
SSE	15719.44	61	257.70	
Total	16476.87	63		

(b) 三種處理方式的聯立信賴區間為： $m = C_2^3 = 3$

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &: (81.05 - 78.56) \pm t_{\frac{0.05}{6}}(61) s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \\ &= 2.5 \pm 2.6 \cdot \sqrt{15.99} \cdot \sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{16}} \\ &= (-0.7, 5.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_3 &: (81.05 - 87.81) \pm t_{\frac{0.05}{6}}(61) \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{16}} \\ &= (-9.9, -3.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_2 - \mu_3 &: (78.56 - 87.81) \pm t_{\frac{0.05}{6}}(61) \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} \\ &= -9.25 \pm 2.6 \cdot \sqrt{15.99} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} \\ &= (-12.93, -5.57)\end{aligned}$$

9. (1) 1225.6, (2) 2986, (3)  $= k - 1 = 4$ , (4)  $= n - k = 45$ ,  
(5) 66.36, (6) 4.071

10. (a)  $m = C_2^4 = 6$

各組的單一 C.I. 分別為：

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &: (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{0.025}(76) \cdot \sqrt{MSE} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \\ &= 2.1 \pm 2 \times 3.2 \times \sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{18}} \\ &= 2.1 \pm 2 \times 0.954 = (0.192, 4.008)\end{aligned}$$

$$\mu_1 - \mu_3 : 0.5 \pm 2 \times 3.2 \times 0.274 = (-1.254, 2.254)$$

$$\mu_1 - \mu_4 : 4 \pm 2 \times 3.2 \times 0.398 = 4 \pm 2 \times 1.274 = (1.452, 6.548)$$



$$\mu_2 - \mu_3 : -1.6 \pm 2 \times 0.998 = (-3.596, 0.396)$$

$$\mu_2 - \mu_4 : 1.9 \pm 2 \times 1.360 = (-0.82, 4.62)$$

$$\mu_3 - \mu_4 : 3.5 \pm 2 \times 1.306 = (0.888, 6.112)$$

(b)  $t_{\frac{0.05}{12}}(76) \doteq 2.6$

聯立 C.I. 為：

$$\mu_1 - \mu_2 : 2.1 \pm 2.6 \times 0.954 = (-0.380, 4.580)$$

$$\mu_1 - \mu_3 : 0.5 \pm 2.6 \times 3.2 \times 0.274 = (-1.780, 2.780)$$

$$\mu_1 - \mu_4 : 4 \pm 2.6 \times 1.274 = (0.688, 7.312)$$

$$\mu_2 - \mu_3 : -1.6 \pm 2.6 \times 0.998 = (-4.195, 0.995)$$

$$\mu_2 - \mu_4 : 1.9 \pm 2.6 \times 1.360 = (-1.636, 5.436)$$

$$\mu_3 - \mu_4 : 3.5 \pm 2.6 \times 1.306 = (0.104, 6.896)$$

11. (a)  $\bar{x}_{(1)} = 38 \quad 4s_{(1)}^2 = 7250 - 5 \times 38^2 = 30$   
 $\bar{x}_{(2)} = 45 \quad 4s_{(2)}^2 = 10175 - 5 \times 45^2 = 50$   
 $\bar{x}_{(3)} = 40 \quad 4s_{(3)}^2 = 8014 - 5 \times 40^2 = 14$   
 $\bar{\bar{x}} = 41 \quad 19s^2 = 25439 - 15 \times 41^2 = 224$

ANALYSIS OF VARIANCE					
SOURCE	DF	SS	MS	F	D
FACTOR	2	130.00	65.00	8.30	0.005
ERROR	12	94.00	7.83		
TOTAL	14	224.00			

(b)  $F_{0.05}(2, 12) = 3.8853 < F = 8.3$

$\therefore$  reject  $H_0 : \mu_{(1)} = \mu_{(2)} = \mu_{(3)}$

不同價格策略之銷售量不同

(c)  $\mu_1$  的 95% 信賴區間為：

$$\bar{x}_1 \pm t_{0.025}(4) \cdot \frac{\sqrt{MSE}}{n_1} = 38 \pm 2.076 \cdot \sqrt{\frac{7.83}{5^2}} = (36.838, 39.162)$$

(d)  $\mu_2 - \mu_3$  的 95% 單一信賴區間為：

$$\begin{aligned} & (\bar{X}_2 - \bar{X}_3) \pm t_{0.025}(12) \cdot \sqrt{MSE} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}} \\ & = 5 \pm 2.179 \times 2.798 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = (1.144, 8.856) \end{aligned}$$

(e)  $\mu_2 - \mu_3$  的 95% 聯立信賴區間為：

$$\begin{aligned} & 5 \pm t_{\frac{0.05}{6}}(12) \sqrt{MSE} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}} = 5 \pm 2.9 \times 2.798 \times \sqrt{\frac{2}{5}} \\ & = (-0.132, 10.132) \end{aligned}$$

12. (a)

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 67 & \sum_{j=1}^3 (x_{1j} - \bar{x}_1)^2 = 78 \\ \bar{x}_2 = 71 & \sum_{j=1}^3 (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 = 74 \\ \bar{x}_3 = 71 & \sum_{j=1}^3 (x_{3j} - \bar{x}_3)^2 = 86 \\ \bar{x}_4 = 73 & \sum_{j=1}^3 (x_{4j} - \bar{x}_4)^2 = 98 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_A = 70 & \sum (x_{i1} - \bar{x}_A)^2 = 42 \\ \bar{x}_B = 63 & \sum (x_{i2} - \bar{x}_B)^2 = 52 \\ \bar{x}_C = 61 & \sum (x_{i3} - \bar{x}_C)^2 = 62 \\ \bar{\bar{x}} = 68 & \sum \sum (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = 468 \end{cases}$$





ANALYSIS OF VARIANCE				
SOURCE	DF	SS	MS	F
肥料	2	312.00	156.00	39
區域	3	132.00	44.00	11
ERROR	6	24.00	4.00	
TOTAL	11	468.00		

(b)  $H_0 : (\text{肥料}) \mu_A = \mu_B = \mu_C$

$H_0^1 : (\text{區域}) \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

$F_{0.05}(2, 6) = 5.1433 < F = 39 \therefore \text{reject } H_0$

$F_{0.05}(3, 6) = 4.7571 < F = 11 \therefore \text{reject } H_0^1$

$\therefore$  肥料與區域的影響有顯著差異

13. (a)  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(8.2)^2}{(7.5)^2} = 1.195 < F_{0.025}(7, 11) = 3.76$$

所以不拒絕  $H_0$ ，即兩廠產量的變異數沒有顯著差異。

(b)  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$$t = \frac{26.3 - 19.7}{7.78 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{12}}} = 1.86,$$

$$S_p^2 = \frac{7 \times (8.2)^2 + 11 \times (7.5)^2}{8 + 12 - 2} = 60.52$$

由於  $|t| = 1.86 < t_{0.025}(18) = 2.101$

所以不拒絕  $H_0$ ，即兩廠產量的平均數沒有顯著差異。

(c)  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

ANOVA 表如下：

變異來源	平方和	自由度	均方	F- 比值
處理方式	209.09	1	209.09	3.45
殘差	1089.43	18	60.52	
總和	1298.52	19		

由於  $f = 3.45 < f_{0.05}(1, 18) = 4.41$   
 所以不拒絕  $H_0$ ，結果與 (b) 相同。

14.

變異來源	SS	d.f.	MS	F
各月間	66	(5)	(13.2)	(6)
各方法間	36	(2)	(18)	(8.18)
殘差	(22)	(10)	(2.2)	
總和	124	17		

15. (a) 土質：

$$\bar{x}_A = 19 \quad \sum (x_{1j} - \bar{x}_A)^2 = 14$$

$$\bar{x}_B = 15 \quad \sum (x_{2j} - \bar{x}_A)^2 = 26$$

$$\bar{x}_C = 26 \quad \sum (x_{3j} - \bar{x}_A)^2 = 38$$

品種：

$$\bar{x}_A = 20 \quad \sum (x_{x1} - \bar{x}_A)^2 = 26$$

$$\bar{x}_B = 23 \quad \sum (x_{x2} - \bar{x}_B)^2 = 98$$

$$\bar{x}_C = 17 \quad \sum (x_{x3} - \bar{x}_C)^2 = 86$$

$$\bar{\bar{x}} = 20 \quad SST = 264$$

ANALYSIS OF VARIANCE				
SOURCE	DF	SS	MS	F
品種	2	54.00	27.00	4.5
土質	2	186.00	93.00	15.5
ERROR	4	24.00	6.00	
TOTAL	8	264.00		



$$(b) M = C_2^3 = 3$$

$$t_{\frac{0.05}{6}}(4) \doteq 3.8$$

品種間差異的 95% 聯立區間為：

$$\begin{aligned} \mu_A - \mu_B &: (20 - 23) \pm t_{\frac{0.05}{6}}(4) \cdot \sqrt{MSE} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \\ &= -3 \pm 3.8 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = -3 \pm 7.619 \\ &= (-10.619, 4.619) \end{aligned}$$

$$\mu_A - \mu_C : 3 \pm 3.8\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = (-4.619, 10.619)$$

$$\mu_B - \mu_C : 6 \pm 7.619 = (-1.619, 13.619)$$

$$(c) F_{0.05}(2, 4) = 6.9443 < F = 15.5$$

$\therefore$  reject  $H_0$

即土質對稻田產量的影響有顯著不同

16. 計算可得：

$$\text{菜色} : \bar{x}_{\text{養生}} = 149 \quad \bar{x}_{\text{韓式}} = 172 \quad \bar{x}_{\text{滿漢}} = 126 \quad \bar{x}_{\text{海鮮}} = 107$$

$$\text{銷售點} : \bar{x}_1 = 145 \quad \bar{x}_2 = 129 \quad \bar{x}_3 = 136 \quad \bar{x}_4 = 111 \quad \bar{x}_5 = 157$$

$$\bar{x}_6 = 129 \quad \bar{x}_7 = 147 \quad \bar{x}_8 = 154$$

$$\bar{\bar{x}} = 138.5$$

$$\begin{aligned} SSA &= \sum_{j=1}^8 n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 \\ &= 8 \left[ (149 - 138.5)^2 + (172 - 138.5)^2 + (126 - 138.5)^2 \right. \\ &\quad \left. + (107 - 138.5)^2 \right] = 19048 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SSB(\text{銷售點}) &= \sum_{i=1}^4 n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 \\
 &= 4 \left[ (145 - 138.5)^2 + (129 - 138.5)^2 + \cdots + (154 - 138.5)^2 \right] \\
 &= 6560
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SST &= (164 - 138.5)^2 + (140 - 138.5)^2 + \cdots + (109 - 138.5)^2 \\
 &= 27458
 \end{aligned}$$

變異來源	平方和	自由度	均方
A 因子 (套餐)	19048	3	6349.3
B 因子 (銷售點)	6560	7	937.1
殘差	1850	21	88.1
總和	27458	31	

(a)  $F : \frac{937.1}{88.1} = 10.64 > F_{7,21,0.05} = 2.49$ ，因此拒絕  $H_0$ ，即表示各銷售點的銷售量有差異。

(b)  $F : \frac{6349.3}{88.1} = 72.07 > F_{3,21,0.05} = 3.07$ ，因此拒絕  $H_0$ ，即表示各菜色套餐的銷售量有差異。

(c)  $\mu_{A1} - \mu_{A2}$  的信賴區間：

$$\begin{aligned}
 149 - 172 \pm \sqrt{3 \cdot F_{3,21,0.05}} \sqrt{88.1 \left( \frac{2}{8} \right)} &= -23 \pm 14.24 \\
 &= (-37.24, -8.76)
 \end{aligned}$$

$\mu_{A1} - \mu_{A3}$  的信賴區間： $149 - 126 \pm 14.24 = (8.76, 37.24)$

$\mu_{A1} - \mu_{A4}$  的信賴區間： $149 - 107 \pm 14.24 = (27.76, 56.24)$

$\mu_{A2} - \mu_{A3}$  的信賴區間： $172 - 126 \pm 14.24 = (31.76, 60.24)$

$\mu_{A2} - \mu_{A4}$  的信賴區間： $172 - 107 \pm 14.24 = (50.76, 79.24)$

$\mu_{A3} - \mu_{A4}$  的信賴區間： $126 - 107 \pm 14.24 = (4.76, 33.24)$



∴ 六個區間皆不包含 0，

∴ 可推知：各套餐間的平均銷售量皆有所差異。

17. 包裝：

$$\bar{x}_A = 29.2 \quad \sum (x_{1j} - \bar{x}_A)^2 = 86.8$$

$$\bar{x}_B = 29.4 \quad \sum (x_{2j} - \bar{x}_B)^2 = 153.2$$

$$\bar{x}_C = 28.0 \quad \sum (x_{3j} - \bar{x}_C)^2 = 86$$

$$\bar{x}_D = 32.6 \quad \sum (x_{4j} - \bar{x}_D)^2 = 85.2$$

公司：

$$\bar{x}_{\text{甲}} = 30.25 \quad \sum (x_{i1} - \bar{x}_{\text{甲}})^2 = 140.75$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = 31.5 \quad \sum (x_{i1} - \bar{x}_{\text{乙}})^2 = 91$$

$$\bar{x}_{\text{丙}} = 33 \quad \sum (x_{i1} - \bar{x}_{\text{丙}})^2 = 14$$

$$\bar{x}_{\text{丁}} = 25.5 \quad \sum (x_{i1} - \bar{x}_{\text{丁}})^2 = 29$$

$$\bar{x}_{\text{戊}} = 28.75 \quad \sum (x_{i1} - \bar{x}_{\text{戊}})^2 = 62.75 \quad \bar{\bar{x}} = 29.8 \quad SST = 469.2$$

$$H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$$

$$H_0^1 : \mu_{\text{甲}} = \mu_{\text{乙}} = \mu_{\text{丙}} = \mu_{\text{丁}} = \mu_{\text{戊}}$$

ANALYSIS OF VARIANCE				
SOURCE	DF	SS	MS	F
公司	4	131.7	32.9	1.412
包裝	3	58.0	19.3	0.828
ERROR	12	279.5	23.3	
TOTAL	19	469.2		

$$F_{0.05}(4, 12) = 3.2592 > F = 1.412 \quad \therefore \text{accept } H_0$$

$$F_{0.05}(3, 12) = 3.4903 > F = 0.828 \quad \therefore \text{accept } H_0^1$$

即包裝方式和百貨公司的銷售量無顯著差異

18. 學生

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 64.75 \quad \sum_{j=1}^4 (x_{1j} - \bar{x}_1)^2 = 16923 - 4 \times 64.75^2 = 152.75 \\ \bar{x}_2 &= 88.5 \quad \sum_{j=1}^4 (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 = 31402 - 4 \times 88.5^2 = 73 \\ \bar{x}_3 &= 68.75 \quad \sum_{j=1}^4 (x_{3j} - \bar{x}_3)^2 = 19195 - 4 \times 68.75^2 = 288.75 \\ \bar{x}_4 &= 67.75 \quad \sum_{j=1}^4 (x_{4j} - \bar{x}_4)^2 = 18639 - 4 \times 67.75^2 = 278.75 \\ \bar{x}_5 &= 80.5 \quad \sum_{j=1}^4 (x_{5j} - \bar{x}_5)^2 = 26282 - 4 \times 80.5^2 = 361 \end{aligned}$$

科目：

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 74 \quad \sum_{j=1}^5 (x_{j1} - \bar{x}_1)^2 = 806 \\ \bar{x}_2 &= 74.6 \quad \sum_{j=1}^5 (x_{j2} - \bar{x}_2)^2 = 773.2 \\ \bar{x}_3 &= 75.8 \quad \sum_{j=1}^5 (x_{j3} - \bar{x}_3)^2 = 404.8 \\ \bar{x}_4 &= 71.8 \quad \sum_{j=1}^5 (x_{j4} - \bar{x}_4)^2 = 746.8 \\ \bar{\bar{x}} &= 74.05 \quad \sum \sum (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = 2772.9 \end{aligned}$$

SOURCE	DF	SS	MS	F
科目	3	42.15	14.1	0.152
學生	4	1618.7	404.7	4.366
ERROR	12	1112.1	92.7	
TOTAL	19	2772.9		

(a)  $H_0 : \mu_{\text{數}} = \mu_{\text{英}} = \mu_{\text{經}} = \mu_{\text{統}}$

$$F_{0.05}(3, 12) = 3.4903 > F = 0.152 \text{ accept } H_0$$

∴ 課程難度相同

(b)  $H_0^1 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$

$$F_{0.05}(4, 12) = 3.2592 < 4.366 = F \text{ reject } H_0^1$$

∴ 學生能力不相等



19. ANOVA 表如下：

變異來源	平方和	自由度	均方	F- 比值
施肥方式	1157	3	385.667	$F_1 = 6.17$
小麥品種	350	2	175.0	$F_2 = 2.80$
交互作用	771	6	128.5	$F_3 = 2.05$
殘差	1501	24	62.542	
總和	3779	35		

結論為：無顯著的交互作用，施肥方式有顯著的影響，小麥品種無顯著的影響。

20.  $H_0$ ：處理方式(工作經驗)無差異

$H'_0$ ：區集(工作性質)無差異

$H''_0$ ：無交互作用

ANOVA 表

變異來源	平方和	自由度	均方	F- 比值
處理	140.33	2	70.17	$F_1 = 2.14$
區集	2791.00	2	1395.50	$F_2 = 42.65$
交互作用	70.67	4	17.67	$F_3 = 0.54$
殘差	294.50	9	32.72	
總和	3296.50	17		

查表知  $F_{0.025}(2, 9) = 5.71$ ， $F_{0.025}(4, 9) = 4.72$

因此，結論為拒絕  $H'_0$ (工作性質有顯著差異)，接受  $H_0$ (工作經驗無顯著異)及接受  $H''_0$ (無交互作用)。

21.  $H_0$ ：教育程度與性別無顯著交互作用

$H'_0$ ：教育程度對工作滿足感無顯著差異

$H''_0$ ：性別對工作滿足感無顯著差異

$a = 2, b = 2, n = 5$

ANOVA 表如下：

變異來源	平方和	自由度	均方	$F$ - 比值
教育程度	22.05	1	22.05	$F_1 = 12.6$
性別	11.25	1	11.25	$F_2 = 6.43$
交互作用	0.45	1	0.45	$F_3 = 0.26$
殘差	28.0	16	1.75	
總和	61.75	19		

查表  $F_{0.05}(1, 16) = 4.49$ ，所以

- (1) 教育程度與性別無顯著交互作用。
- (2) 教育程度對工作滿足感有顯著差異。
- (3) 性別對工作滿足感有顯著差異。

22.

變異來源	平方和	自由度	均方	$F$ - 比值
$A$	36	3	12	$F_1 = 6$
$B$	40	2	20	$F_2 = 10$
$AB$	18	6	3	$F_3 = 1.5$
殘差	24	12	2	
總和	118	23		